Statistika
Vaja 5

A. Blejec

3. maj 2007

1 Intervalsko ocenjevanje parametrov

Ocena za povprečno vrednost μ:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Nepristranska ocena za standarno deviacijo:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}{n-1}$$

Standardna napaka za povprečno vrednost $\overline{x}$:

$$se_{\overline{x}} = s/\sqrt{n}$$

Interval zaupanja za povprečno vrednost μ:

Če poznamo standardno deviacijo σ:
$z = z_{1-\alpha/2}$

$$\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Neznano pravo standardno deviacijo σ nadomestimo z nepristransko oceno s:
$t = t_{1-\alpha/2}(n-1)$

$$\overline{x} - t\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Naloga 1 Pri proučevanju vpliva rastnih dodatkov A in B na rast smrečic smo izmerili naslednje velikosti (v cm):

```
A 10 12 10  8 10 13 10
B 13 15 15 18 14
```

	$\overline{x}$	s	n	se
A	10.429	1.618	7	0.612

File: result.xls

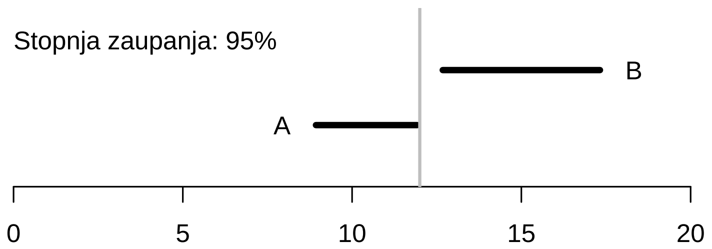
a) Določite 95% (90%) intervala zaupanja za povprečno velikost. Narišite intervala zaupanja.

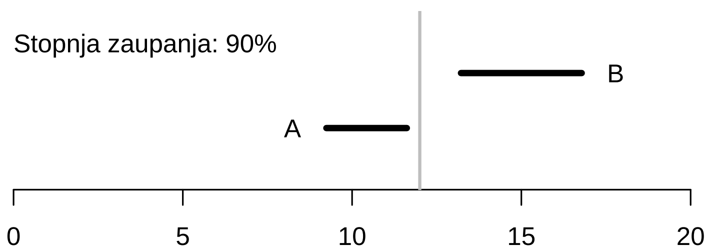
95 % interval zaupanja za μ: $(8.93, 11.93)$ $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(6) = 2.447$
90 % interval zaupanja za μ: $(9.24, 11.62)$ $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.95}(6) = 1.943$

	$\overline{x}$	s	n	se
B	15	1.871	5	0.837

File: result.xls

95 % interval zaupanja za μ: $(12.68, 17.32)$ $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(4) = 2.776$
90 % interval zaupanja za μ: $(13.22, 16.78)$ $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.95}(4) = 2.132$





b) V premislek: V drevesnici zatrjujejo, da ta vrsta smrečic brez rastnih dodatkov zraste v povprečju 12 cm. Kaj lahko poveste o dodatkih A in B?

Primerjajte možne dejanske povprečne prirastke v primeru A in B (zmanjšana rast v primeru A glede na B in primerjava s prirastki brez rastnih dodatkov - siva črta na sliki intervalov zaupanja)

Naloga 2 Za neko vrsto sadik zagotavljajo, da v povprečju zrastejo 12 cm, ter da 75% sadik (v enem tednu) zraste do med 10 - 14 cm. Ali vzorec 10 sadik s povprečno velikostjo 13 cm potrjuje njihovo trditev ?

Privzemimo, da je velikost sadik porazdeljena normalno: $V\ N(12, \sigma^2)$. Iz podatka o intervalu, ki vsebuje znan delež enot moramo ocenite standardno deviacijo σ (ker je ne bomo ocenjevali iz vzorca, lahko ocenjeno vrednost vzamemo kot pravo standardno deviacijo).

$$P(10 < V \leq 14) = P(\frac{10-12}{\sigma} < \frac{V-12}{\sigma} \leq \frac{14-12}{\sigma}) = P(-2/\sigma < Z \leq 2/\sigma) = 0.75$$
$$H(2/\sigma) = 0.75/2 = 0.375 \Rightarrow 2/\sigma = 1.15 \Rightarrow \sigma = 1.74$$
$$se = 0.55$$

Pri stopnji zaupanja 0.99 je
99 % interval zaupanja za μ: $(11.58, 14.42)$ $\qquad z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.576$

Ker zagotovljeno povprečje (12) leži v intervalu zaupanja, ni razloga, da ga ne bi sprejeli kot možno pravo povprečno velikost rastlin.

Naloga 3 Pošiljka mandarin "NixPeska"je sprejemljiva, če je v pošiljki manj kot 10mandarin s peškami. Po obilni malici (pojedli smo 50 mandarin) smo ugotovili, da so bile peške v 10 mandarinah. Ali je pošiljka ustrezno deklarirana? Stopnja zaupanja naj bo 95

Interval zaupanja za strukturni delež π:
(za dovolj velike vzorce je vzorčna porazdelitev normalna, $z = z_{1-\alpha/2}$)

$$\widehat{\pi} = p = \frac{k}{n}$$
$$se_p = \sqrt{p(1-p)/n}$$
$$p - z \cdot se_p < \pi < p + z \cdot se$$

V našem primeru je:

$$p = 0.2, se_p = 0.057$$

95 % interval zaupanja za π: $(0.09, 0.31)$ $\qquad z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.960$
90 % interval zaupanja za π: $(0.11, 0.29)$ $\qquad z_{1-\alpha/2} = z_{0.95} = 1.645$

Kljub temu, da smo našli kar precej pečkatih mandarin (20%), je možno, da je v pošiljki dejansko le 10% pečkatih mandarin. Smo imeli pač smolo :) Po drugi strani pa je pri teh opazovanjih lahko v pošiljki tudi do 9% pečkatih mandarin.

Naloga 4 Z vzorcem s 5 enotami skušamo določiti povprečno težo vrste laboratorijskih miši. Izračunali smo povprečno težo 15 g ter varianco (pristransko!) 2. Poiščite intervale zaupanja za povprečno težo miši. Za izračun uporabite nepristransko oceno variance. Določite tudi intervala zaupanja za povprečno težo miši, če za oceno variance vzamete spodnjo (zgornjo) mejo zaupanja za varianco. Primerjajte vse tri tako dobljene intervale zaupanja.

Interval zaupanja za varianco σ^2:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$$

	$\overline{x}$	s	n	se
teža	15	1.581	5	0.707

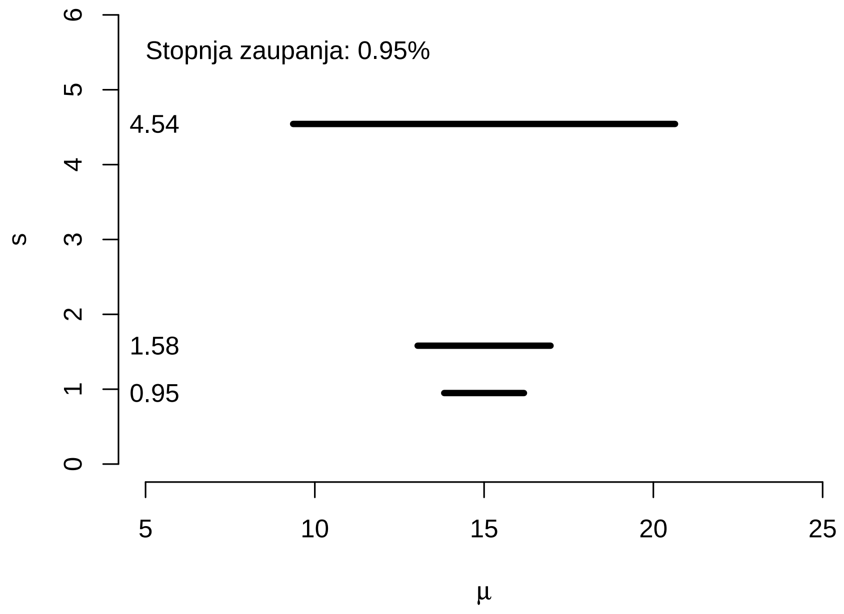
File: teza.xls

95 % interval zaupanja za μ: $(13.04, 16.96)$ $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(4) = 2.776$

95 % interval zaupanja za σ^2: $(0.90, 20.64)$
$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(4) = 11.143$
$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(4) = 0.484$

Vzemimo oceno $s^2 = 0.9, s = 0.95$:
95 % interval zaupanja za μ: $(13.82, 16.18)$ $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(4) = 2.776$

Vzemimo oceno $s^2 = 20.64, s = 4.54$:
95 % interval zaupanja za μ: $(9.36, 20.64)$ $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(4) = 2.776$


Stopnja zaupanja: 0.95%
4.54
1.58
0.95
s
0
1
2
3
4
5
6
5
10
15
20
25
μ

Naloga 5 Ponovite nalogo 5.4 kot da je vzorec velik n=20 (n=50 enot).

$n = 20$

	$\overline{x}$	s	n	se
teža	15	1.451	20	0.324

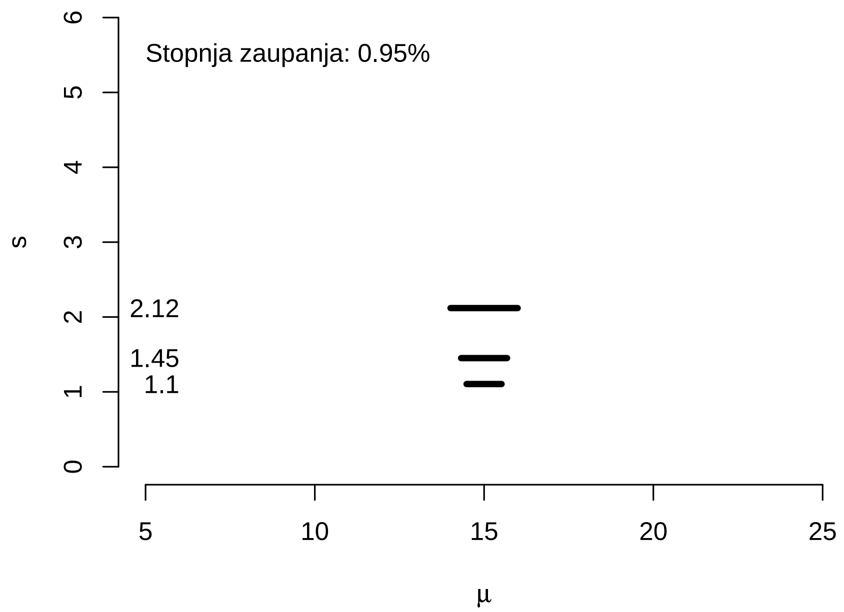
File: `teza.xls`

95 % interval zaupanja za μ: $(14.32, 15.68)$ $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(19) = 2.093$

95 % interval zaupanja za σ^2: $(1.22, 4.49)$
$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(19) = 32.852$
$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(19) = 8.907$

Vzemimo oceno $s^2 = 1.22, s = 1.1$:
95 % interval zaupanja za μ: $(14.48, 15.52)$ $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(19) = 2.093$

Vzemimo oceno $s^2 = 4.49, s = 2.12$:
95 % interval zaupanja za μ: $(14.01, 15.99)$ $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(19) = 2.093$



$n = 50$

	$\overline{x}$	s	n	se
teža	15	1.429	50	0.202

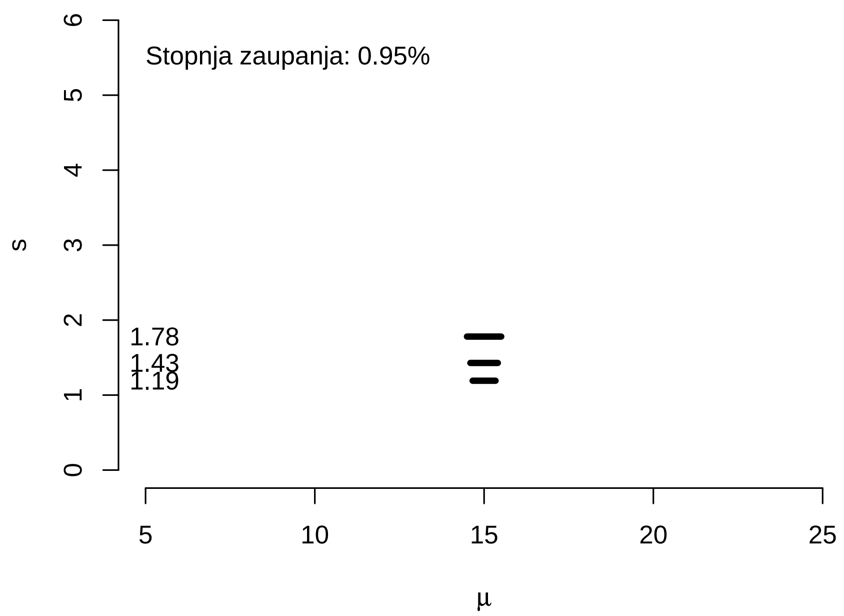
File: teza.xls

95 % interval zaupanja za μ: $(14.59, 15.41)$ $\quad$ $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(49) = 2.010$

95 % interval zaupanja za σ^2: $(1.42, 3.17)$
$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(49) = 70.222$
$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(49) = 31.555$

Vzemimo oceno $s^2 = 1.42, s = 1.19$:
95 % interval zaupanja za μ: $(14.66, 15.34)$ $\quad$ $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(49) = 2.010$

Vzemimo oceno $s^2 = 3.17, s = 1.78$:
95 % interval zaupanja za μ: $(14.49, 15.51)$ $\quad$ $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(49) = 2.010$



Naloga 6 Za določitev velikosti celic v pljučih bi radi oceno z napako, ki bo manjša od 10%. Iz prvih 5 izmerjenih vrednosti smo določili povprečje 17 mikrometrov in vsoto kvadratov izmerjenih vrednosti 1543. Kako velik naj bo vzorec, da bo napaka pri 95% (99%) zaupanju manjša od predpisane?

Potrebno velikost vzorca za relativno napako P lahko ocenimo z

$$n > \left(\frac{2s}{\overline{x}R}\right)^2$$

Stopnja zaupanja 0.95 : $n = 5$; $\overline{x} = 17$; $s = 4.95$; $z = 1.96$; $R = 0.1$

Iz tega ocenimo: $n > 32.6$

Stopnja zaupanja 0.99 : $n = 5$; $\overline{x} = 17$; $s = 4.95$; $z = 2.58$; $R = 0.1$

Iz tega ocenimo: $n > 56.2$