Verjetnostne porazdelitve

A. Blejec

22. april 2008

Povzetek

Opisanih je nekaj diskrtenih in zveznih verjetnostnih porazdelitev: Bernoullijeva, enakomerna diskretna, binomska, Poissonova, geometrijska , negativna binomska (Pascalova), Poissonova (za čas in prostor), eksponentna in gama.

1 Bernoulli-jeva porazdelitev

Diskretna porazdelitev, ki opisuje verjetnost Bernoullijevega poskusa, ki ima izida *1* in *0* z verjetnostma p in $1-p$:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

Pogosto pišemo $1 - p = q$

$$E(X) = p$$
$$V(X) = p \cdot (1-p) = pq$$

Dve razširitvi:

- razširitev na več možnih izidov $1, 2, 3, \ldots, m$
- poskus večkrat ponovimo, tako dobimo zaporedje B. poskusov

2 Diskretna enakomerna porazdelitev

Če razširimo Bernoullijev poskus z dva na poskus z m enakomožnimi izidi $1, 2, 3, ..., m$, ki imajo vsi enako verjetnost $p = 1/m$ dobimo diskretno enakomerno porazdelitev

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ p & p & p & \dots & p \end{pmatrix}$$

$$E(X) = (m+1)/2$$
$$V(X) = \frac{m^2-1}{12}$$

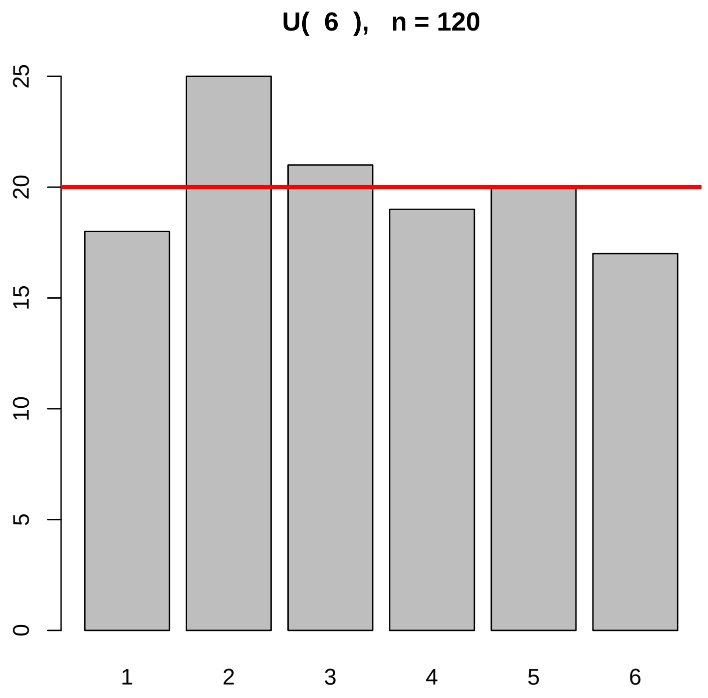
Za $m = 6$ lahko vzamemo kot model igralno kocko:

$$E(X) = 3.5$$
$$V(X) = 2.917$$

```
 [1] 4 2 2 5 6 5 4 6 3 5 6 5 6 4 1 1 2 6 2 1 3 5 2 2 1 2 3 1 5 4 2 3
[33] 2 6 4 1 2 4 2 2 4 3 5 4 2 3 5 4 2 1 5 6 3 1 1 2 3 5 1 1 1 5 6 6
[65] 3 6 4 5 1 5 4 6 3 1 3 1 2 4 1 2 3 5 4 5 3 3 5 3 2 3 4 2 4 5 2 6
[97] 4 2 6 5 6 2 2 2 1 1 3 5 4 3 3 4 5 3 6 4 3 2 6 6
```

Povprečje: 3.408333

Varianca : 2.764636



Iz končnega ali neskončnega zaporedja Bernoullijevih poskusov izpeljemo tri porazdelitve, ki opisujejo zanimive situacije:

- Število ugodnih izidov v končnem številu poskusov
- Število poskusov do prvega ugodnega izida
- Število poskusov do *r*-tega ugodnega izida

3 Binomska porazdelitev

$$X \sim B(n,p)$$

$$p_k = p(k) = P(X = k \mid n, p) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = np$$
$$V(X) = np(1-p)$$
$$1 - p = q$$

Asimetrija:

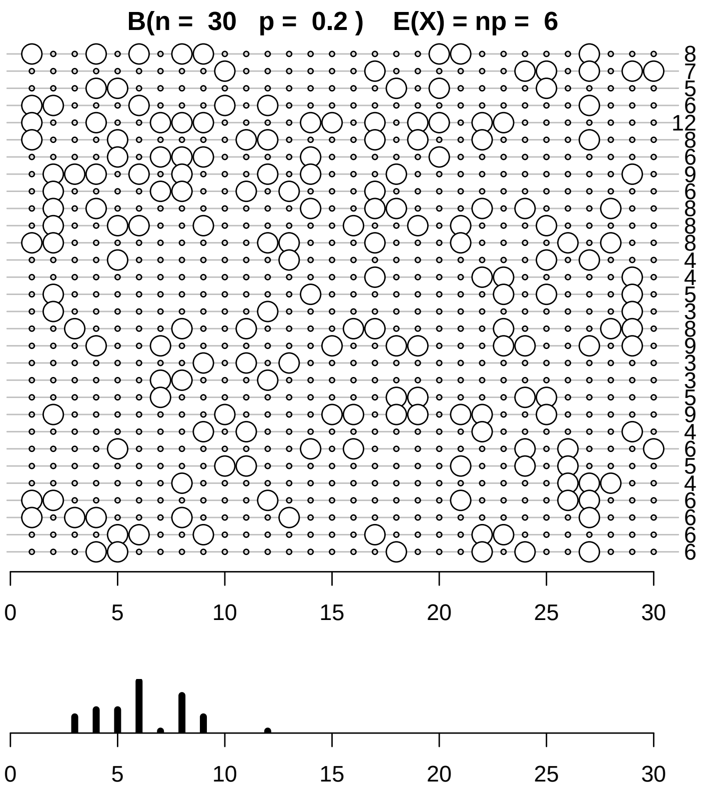
$$\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

Sploščenost:

$$3 + \frac{1-6pq}{npg}$$

Povprečje: 6.23

Varianca : 4.6



4 Geometrijska porazdelitev

Število poskusov (k) do prvega ugodnega izida.

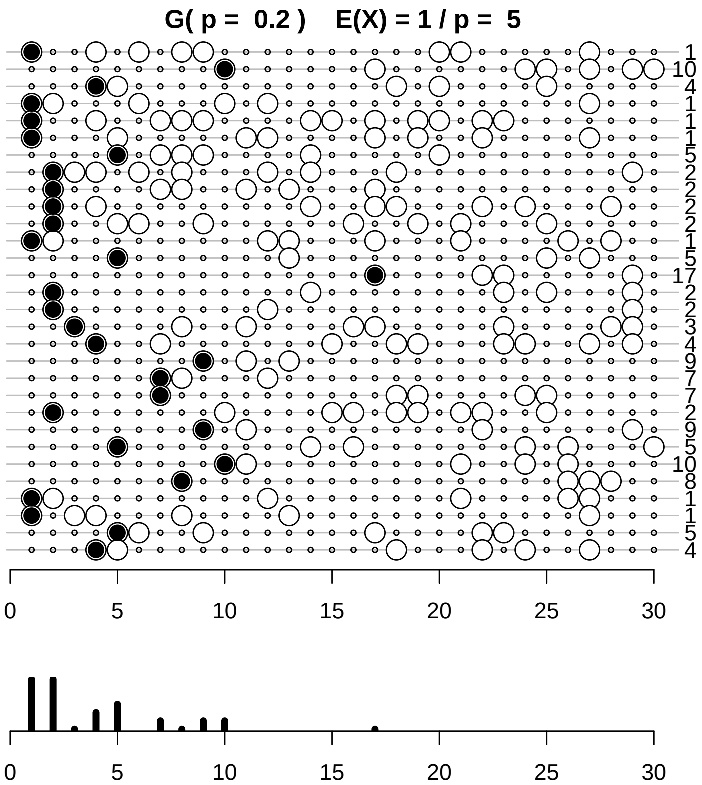
$$X \sim G(p)$$

$$p_k = p(k) = P(X = k \mid p) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Povprečje: 4.43

Varianca : 14.32



5 Negativna binomska porazdelitev

Število poskusov (k) do r-tega ugodnega izida.

$$X \sim NB(r, p)$$

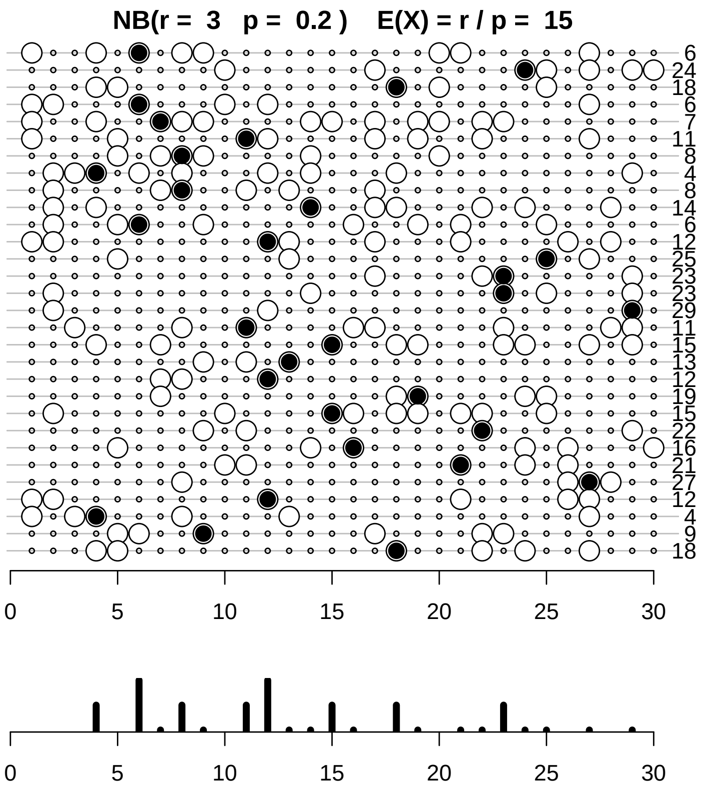
$$p_k = p(k) = P(X = k \mid r, p) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$E(X) = \frac{r}{p}$$
$$V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Geometrijska porazdelitev je poseben primer negativne binomske porazdelitve za $r = 1$:

$$G(p) = NB(1, p)$$

```
Povprečje:  14.6
Varianca :  52.11
```



6 Eksponentna porazdelitev

Čakalni čas do prvega dogodka, pri znanem povprečnem preživetvenem času $\beta = 1/\lambda$ opisuje eksponentna porazdelitev (λ je število dogodkov v enoti časa, 'rate'):

$$f(T) = \lambda e^{-\lambda T} = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{T}{\beta}}$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \beta$$
$$V(T) = \frac{1}{\lambda^2} = \beta^2$$

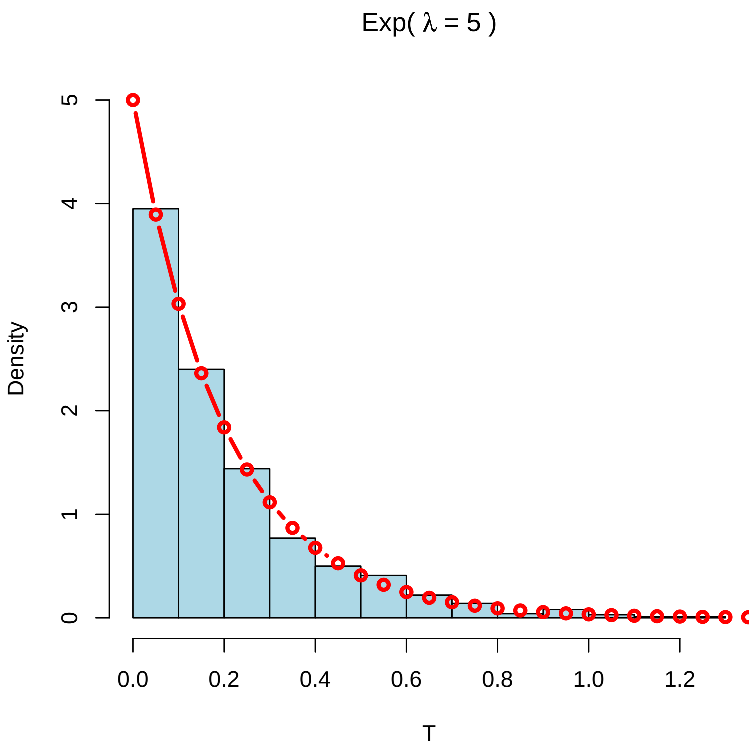
Kumulativna porazdelitev (porazdelitvena funkcija)

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Krivulja preživetja:

$$P(T > s + t | T > s) = P(T > t) = \overline{F}(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$$

```
Beta      : 0.2
 Lambda    : 5
 Povprečje: 0.2022035
 Varianca : 0.03934993
```



7 Gama porazdelitev

Čakalni čas do r-tega dogodka, pri znanem povprečnem preživetvenem času β.

$$f(T|r,\beta) = \frac{1}{\Gamma(r)\beta^r} T^{r-1} e^{-\frac{T}{\beta}}$$

$$E(T) = r\beta$$
$$V(T) = r\beta^2$$

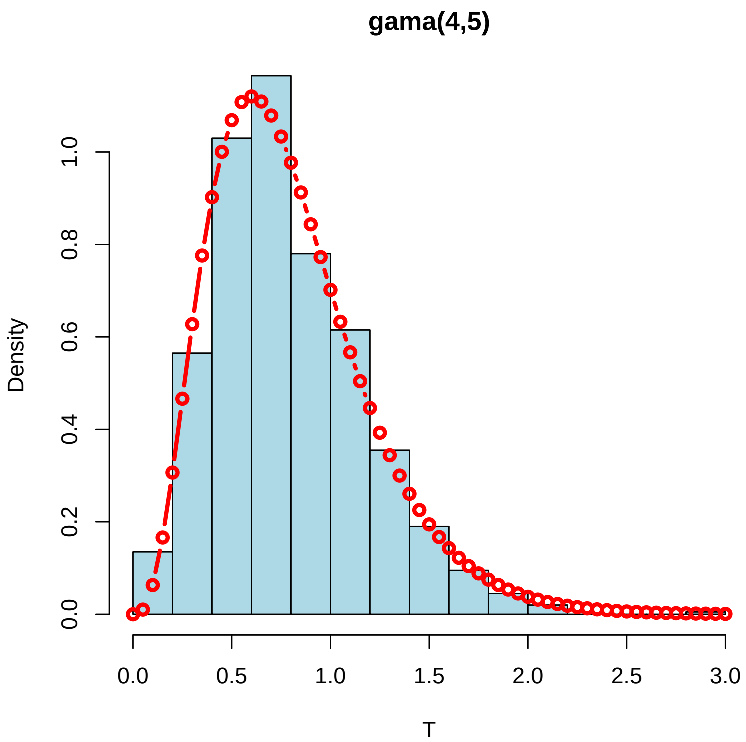
Preživetveni čas β je v zvezi s številom dogodkov v enoti časa λ:

$$\beta = 1/\lambda.$$

Gostoto lahko zapišemo tudi takole:

$$f(T|r,\lambda) = \frac{\lambda^r T^{r-1} e^{-T\lambda}}{\Gamma(r)}$$

```
r         : 4
 Beta      : 0.2
 Lambda    : 5
 Povprečje: 0.8090597
 Varianca : 0.1567341
```



Eksponentna porazdelitev je Gama porazdelitev za $r = 1$.

8 Poissonova porazdelitev

Poissonova porazdelitev opisuje porazdelitev števila dogodkov v času in prostoru, pri nekem povprečnem številu dogodkov v enoti časa (λ).

$$P[(N(t+\tau) - N(t)) = k] = \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^k}{k!} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

, kjer $N(t+\tau) - N(t)$ predstavlja število dogodkov v intervalu $[t, t+\tau]$.